

Θεωρία Αποφάσεων Bayes

Άσκηση $X \sim \text{Exp}(\theta)$

$$f(\theta) = 1, \theta > 0, L(\theta, d) = |d - \theta|$$

Να βρεθεί ο εκτιμητής Bayes της θ .Λύση

$$\text{Έχω } f(x|\theta) = \theta e^{-x\theta}, \theta > 0 \quad \left. \begin{array}{l} f(\theta) = 1, \theta > 0 \\ f(\theta|x) \propto f(x|\theta)f(\theta) = \theta \cdot e^{-x\theta} \leftarrow \text{Gamma.} \end{array} \right\}$$

Ισχύει:

$$\int_0^{\infty} f(\theta|x) d\theta = \frac{1}{2}$$

ΔΕ κατά Bayes : Κεντρική ιδέα : $P_{\theta|x}(L < \theta < U) = 1 - \alpha$ Μας ενδιαφέρει ο εντοπισμός των σημείων L, U ή αλλιώς $q_1 = L(x), q_2 = U(x)$.1ος Τρόπος : Επιθυμούμε την ελαχιστοποίηση του μήκους $L = q_2 - q_1$ (ΔΕ ελάχιστου μήκους)2ος Τρόπος : Επιθυμούμε τα q_1, q_2 να είναι τ.ω : $P_{\theta|x}(\theta \leq q_1) = \frac{\alpha}{2}$ ή $P_{\theta|x}(\theta \geq q_2) = \frac{\alpha}{2}$
(ΔΕ ίσων ουρών)ΚΑΝΟΝΑΣ Όταν $f_{\theta|x}$ αύξουσα ως προς θ Τότε παραχωρίζουμε ως προς q_2 .Όταν $f_{\theta|x}$ φθίνουσα ως προς θ Τότε παραχωρίζουμε ως προς q_1 .

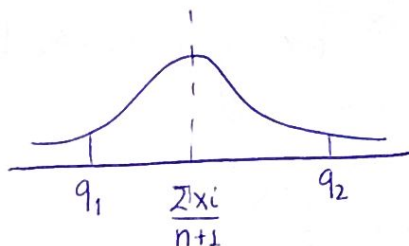
Για να έχει νόημα ο κανόνας θα πρέπει να γνωρίζουμε την μορφή της $f_{\theta|x}$. Εάν κάτι τέτοιο δεν είναι επιπρόσθετο μηδενίζουμε της παραγωγή.

Παράδειγμα 1 Έστω τ.δ. $X_1, X_2, \dots, X_n$ με $X_i/\theta \sim N(\theta, 1)$ και $\theta \sim N(q, 1)$

Ναι υπολογιστεί Δ.Ε. ελαχίστου μήκους και ισων ουρών για την θ .

Λύση

Βάσει προηγ. αναφερθείσας Εφαρμογής αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση αυτή είναι $\theta|X \sim N\left(\frac{\sum x_i}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)$



$$q_1 < \frac{\sum x_i}{n+1} < q_2$$

α) ΔΕ ελαχίστου μήκους

Η μονοτονία της εκ των υστέρων δεν παραμένει ίδια σε όλο το π.ο

Επομένως θα έχουμε ότι: $\frac{d\ell}{dq_1} = \frac{f_{\theta|X}(q_1) - f_{\theta|X}(q_2)}{f_{\theta|X}(q_2)} = 0 \Rightarrow$

$$f_{\theta|X}(q_1) = f_{\theta|X}(q_2) \Rightarrow \text{γνωρίζουμε ότι } f_{\theta|X} = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

$$\left(q_1 - \frac{\sum x_i}{n+1}\right)^2 = \left(q_2 - \frac{\sum x_i}{n+1}\right)^2 \Rightarrow q_1 - \frac{\sum x_i}{n+1} = q_2 - \frac{\sum x_i}{n+1} \Rightarrow q_1 = q_2 \text{ Απορρ.}$$

$$q_1 - \frac{\sum x_i}{n+1} = -q_2 + \frac{\sum x_i}{n+1} \Rightarrow \boxed{q_1 = 2 \frac{\sum x_i}{n+1} - q_2} \quad (2)$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι:

$$\boxed{P_{\theta|X}(q_1 < \theta < q_2) = 1 - \alpha} \quad (1)$$

Επομένως η επίλυση των (1) ή (2) δίνει τα επιθυμητά q_1 και q_2 .

ΔΕ ισων ουρών

Επιθυμούμε να εντορίσουμε καταλληλά q_1, q_2 τ.ω $P(\theta \leq q_1) = P(\theta \geq q_2) = \frac{\alpha}{2}$

$$\text{Θα είναι } P(\theta|X \geq q_2) = \frac{\alpha}{2} = P\left[\theta \geq q_2 / \theta \sim N\left(\frac{\sum x_i}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)\right] = \frac{\alpha}{2}$$

$$P\left[\frac{\theta - \frac{\sum x_i}{n+1}}{(1/n+1)^{1/2}} \geq \frac{q_2 - \frac{\sum x_i}{n+1}}{(1/n+1)^{1/2}}\right] = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow Z_{\alpha/2} = \frac{q_2 - \frac{\sum x_i}{n+1}}{(1/n+1)^{1/2}} \Rightarrow$$

$$q_2 = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{1/2} Z_{\alpha/2} + \frac{\sum x_i}{n+1}$$

$$q_1 = \left(\frac{\sum x_i}{n+1}\right) \pm \left(\frac{1}{n+1}\right)^{1/2} Z_{\alpha/2}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Καταλήγαμε στο Δ.Ε Bayes $\frac{\sum x_i}{n+1} \pm \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n+1}}$ ενώ βάση της κλασικής στατιστικής θα είχαμε Δ.Ε $\bar{X} \pm \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}$

Επομένως στη θεωρία Bayes το μήκος του Δ.Ε είναι $2 \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n+1}}$

Ενώ στην κλασική θεωρία το αντίστοιχο μήκος είναι $2 \cdot \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}$.

Άρα Μήκος Bayes < Μήκος κλασικό

Αναμενόμενο συμπέρασμα μας και με τη θεωρία Bayes αξιοποιούμε πρόσθετη πληροφορία.

Παράδειγμα 2 Έστω τ.δ $X_1, X_2, \dots, X_n$ από $U(0, \theta)$, δηλ $f(x_i|\theta) = \frac{1}{\theta}$ $0 \leq x_i \leq \theta$
όπου η θ έχει εκ των προτέρων $f(\theta) = \frac{k x_0^k}{\theta^{k+1}}$ $0 < x_0 < \theta < +\infty$

Ναι προσδιοριστούν δ.ε ελαχίστου μήκους και ίσων ουρών.

Λύση

$$\text{Θα έχουμε ότι } f(\theta|x) = \frac{f(\theta) \prod f(x_i|\theta)}{\int_0^\infty f(\theta) \prod f(x_i|\theta) d\theta} = \frac{k x_0^k \theta^{-(k+1+n)}}{\int_0^\infty k x_0^k \theta^{-(k+1+n)} d\theta}$$

$$\begin{array}{l} \text{όμως } 0 \leq x_1 \leq \theta \\ 0 \leq x_2 \leq \theta \\ \vdots \\ 0 \leq x_n \leq \theta \\ x_0 \leq \theta \end{array} \Rightarrow \underbrace{\max \{x_0, x_{(n)}\}}_T \leq \theta < +\infty \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 0 \leq x_1 \leq \theta \\ 0 \leq x_2 \leq \theta \\ \vdots \\ 0 \leq x_n \leq \theta \\ x_0 \leq \theta \end{array}} \right\} T \leq \theta < +\infty$$

Επομένως θα είναι $f(\theta|x) = C \cdot \theta^{-(k+1+n)}$, $T \leq \theta < +\infty$

$$\text{όπου } C = \frac{1}{\int_T^{+\infty} \theta^{-(k+1+n)} d\theta}$$

Για $100(1-\alpha)\%$ δ.ε για την θ . Θέλουμε να προσδιορίσουμε τα q_1, q_2 χρησιμοποιώντας τη σχέση $P_{\theta|x}(q_1 \leq \theta \leq q_2) = 1-\alpha$

$$\eta \equiv \pi_{\theta|x}(q_2) - \pi_{\theta|x}(q_1) = 1 - \alpha \quad (1)$$

α) ΔΕ ελαχίστου μήκους

Έχουμε $l = q_2 - q_1$. Παραγωγίζοντας ως προς q_1 , θα έχουμε $\frac{dl}{dq_1} = \frac{dq_2}{dq_1} - 1 \quad (2)$

Όμως από (1) παραγωγίζοντας ως προς q_1 είναι $\frac{dq_2}{dq_1} \pi_{\theta|x}(q_2) - \pi_{\theta|x}(q_1) = 0$

$$\Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1} = \frac{\pi_{\theta|x}(q_1)}{\pi_{\theta|x}(q_2)} \quad (3)$$

Επομένως η (2) $\xRightarrow{(3)} \frac{dl}{dq_1} = \frac{\pi_{\theta|x}(q_1) - \pi_{\theta|x}(q_2)}{\pi_{\theta|x}(q_2)} > 0 \Rightarrow l$ αυξάνεται ως προς q_1 .
Λίσιχκει αφού $\pi_{\theta|x}$ φθινούσα ως προς θ .

Οπότε η l θα ελαχιστοποιείται ως προς q_1 στο κάτω άκρο του π.ο, δηλ το T
Επομένως $\boxed{q_1 = T}$

Παράλληλα, $\pi_{\theta|x}(T \leq \theta \leq q_2) = 1 - \alpha \Rightarrow \int_T^{q_2} c \theta^{-(k+n+1)} d\theta = 1 - \alpha$

$$\Rightarrow \int_T^{q_2} \theta^{-(k+n+1)} d\theta = \frac{1}{c} (1 - \alpha) = \int_T^{+\infty} \theta^{-(k+n+1)} d\theta (1 - \alpha) \Rightarrow \dots \text{πράξεις}$$

$$\Rightarrow \boxed{q_2 = T \cdot \alpha^{-\frac{1}{n+k}}}$$

Έτσι το ΔΕ ελαχίστου μήκους για την θ θα είναι το $(q_1, q_2) = (T, T \alpha^{-\frac{1}{n+k}})$.

β) ΔΕ ίσων ουρών.

Θα έχουμε ότι $\pi_{\theta|x}(\theta \leq q_1) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \int_T^{q_1} c \theta^{-(k+n+1)} d\theta = \frac{\alpha}{2} \quad (4)$

και $\pi_{\theta|x}(\theta \geq q_2) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \int_{q_2}^{+\infty} c \theta^{-(k+n+1)} d\theta = \frac{\alpha}{2} \quad (5)$

όμως (4) $\Rightarrow \int_T^{q_1} \theta^{-(n+k+1)} d\theta = \frac{1}{c} \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \left[\frac{\theta^{-(n+k)}}{-(n+k)} \right]_T^{q_1} = \frac{\alpha}{2} \int_T^{+\infty} \theta^{-(n+k+1)} d\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{q_1^{-(n+k)} - T^{-(n+k)}}{-(n+k)} = \frac{\alpha}{2} \frac{[\theta^{-(n+k)}]_T^{+\infty}}{-(n+k)} \Rightarrow$$

$$q_1^{-(n+k)} - T^{-(n+k)} = \frac{\alpha}{2} (0 - T^{-(n+k)}) \Rightarrow q_1^{-(n+k)} = T^{-(n+k)} (1 - \frac{\alpha}{2})$$

$$\Rightarrow \boxed{q_1 = T(1 - \frac{\alpha}{2})^{-\frac{1}{(n+k)}}}$$

$$\text{Αντίστοιχα θα είναι (5)} \Rightarrow \int_{q_2}^{+\infty} \theta^{-(n+k+1)} d\theta = \frac{\alpha}{2} \int_T^{+\infty} \theta^{-(n+k+1)} d\theta$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\theta^{-(n+k)}}{-(n+k)} \right]_{q_2}^{+\infty} = \frac{\alpha}{2} \left[\frac{\theta^{-(n+k)}}{-(n+k)} \right]_T^{+\infty} \Rightarrow 0 - q_2^{-(n+k)} = \frac{\alpha}{2} (0 - T^{-(n+k)}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{q_2 = T \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{-\frac{1}{(n+k)}}}$$

Παράδειγμα 3 Έστω $X|\theta$ με σ.π.π $f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)}$ $x \geq \theta$

και $f(\theta) = \theta \cdot e^{-\theta}$, $\theta > 0$

Να βρεθούν τα δ.ε ελαχίστου μήκους και ίσων ουρών.

Λύση

$$\text{Θα Έχουμε ότι } f(\theta|x) = \frac{f(\theta) \prod f(x|\theta)}{\int_{\theta} f(\theta) \prod f(x|\theta) d\theta} = \frac{\theta \cdot e^{-\theta} e^{-(x-\theta)}}{\int_{\theta} \theta \cdot e^{-\theta} e^{-(x-\theta)} d\theta}$$

$$= \frac{\theta \cdot e^{-\theta-x+\theta}}{\int_{\theta} \theta e^{-\theta} e^{-(x-\theta)} d\theta} = \frac{\theta e^{-x}}{\int_{\theta} \theta e^{-x} d\theta} = \frac{\theta}{\int_{\theta} \theta d\theta}$$

$$\text{όμως } c = \int_{\theta} \theta d\theta = \int_0^x \theta d\theta = \left[\frac{\theta^2}{2} \right]_0^x = \frac{x^2}{2} \quad \text{άρα } f(\theta|x) = \frac{2\theta}{x^2}, \quad 0 < \theta < x$$

α) ΔΕ ελάχιστου μήκους

Δεδομένου ότι $f_{\theta|x}$ αύξουσα ως προς θ θα παραχρησιάμε την ποσότητα $l = q_2 - q_1$ ως προς q_2 .

Θα είναι $\frac{dl}{dq_2} = 1 - \frac{dq_1}{dq_2}$ (2) και $P_{\theta|x}(q_1 \leq \theta \leq q_2) = 1 - \alpha$ (1)

Παραχρηζούμε την (1) ως προς q_2 και έχουμε

$$f_{\theta|x}(q_2) - f_{\theta|x}(q_1) \frac{dq_1}{dq_2} = 0 \quad \frac{dq_1}{dq_2} = \frac{f_{\theta|x}(q_2)}{f_{\theta|x}(q_1)} \quad (3)$$

Από (2) $\xrightarrow{(3)}$ $\frac{dl}{dq_2} = 1 - \frac{f_{\theta|x}(q_2)}{f_{\theta|x}(q_1)} = \frac{f_{\theta|x}(q_1) - f_{\theta|x}(q_2)}{f_{\theta|x}(q_1)} < 0$

Επομένως l θα είναι φθίνουσα ως προς q_2 .

και άρα θα ελαχίται στο πάνω άκρο του πο

δηλ $q_1 \propto (q_2 = x)$

Παράλληλα από (1) θα είναι $P_{\theta|x}(q_1 \leq \theta \leq x) = 1 - \alpha \Rightarrow \int_{q_1}^x \frac{2\theta}{x^2} d\theta = 1 - \alpha =$

$$\Rightarrow \left[\frac{\theta^2}{x^2} \right]_{q_1}^x = 1 - \alpha \Rightarrow \frac{x^2 - q_1^2}{x^2} = 1 - \alpha \Rightarrow q_1^2 = x^2 \cdot \alpha \Rightarrow q_1 = \pm x\sqrt{\alpha} \quad 0 < q_1 < x$$

Επομένως κρατάμε την τιμή $+x\sqrt{\alpha}$ και το ΔΕ ελάχ μήκους

θα είναι το $(q_1, q_2) = (x\sqrt{\alpha}, x)$.

β) ΔΕ ίσων ουρών

Θα έχουμε ότι $\int_0^{q_1} \frac{2\theta}{x^2} d\theta = \int_{q_2}^x \frac{2\theta}{x^2} d\theta = \frac{\alpha}{2}$

Επομένως θα είναι:

$$\int_0^{q_1} \frac{2\theta}{x^2} d\theta = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{q_1^2}{x^2} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow q_1 = \pm x\sqrt{\frac{\alpha}{2}}, \text{ όμως } 0 < q_1 < x \text{ έτσι } q_1 = x\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$$

Επομένως $\int_{q_2}^x \frac{2\theta}{x^2} d\theta = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{1}{x^2}(x^2 - q_2^2) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 1 - \frac{q_2^2}{x^2} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow q_2 = \pm x\sqrt{1 - \frac{\alpha}{2}}$ όμως $0 < q_2 < x$

Ετσι $\xrightarrow{q_2} q_2 = x\sqrt{1 - \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \text{ΔΕ ίσων ουρών } (q_1, q_2) = (x\sqrt{\frac{\alpha}{2}}, x\sqrt{1 - \frac{\alpha}{2}})$

Παράδειγμα 4

Έστω τ.μ. X με $X|\theta \sim U(0, \theta)$ και $\theta \sim \text{Gamma}(\alpha=2, \beta=1)$

Να βρεθούν: i) η εκ των υστέρων κατανομή θ/x .

ii) 100(1- α)% Δ.Ε. ελαχίστου μήκους ή ίσων ουρών για την θ .

i) Λύση

Γνωρίζουμε ότι $f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}$, $0 < x < \theta$ και $f(\theta) = \frac{\theta^{\alpha-1} e^{-\theta/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}$ $0 < \theta < \infty$

(Επομένως θα έχουμε $f(\theta|x) \propto f(\theta) f(x|\theta)$)

$$f(\theta|x) = \frac{\theta e^{-\theta} \cdot \frac{1}{\theta}}{\int_x^{+\infty} \theta e^{-\theta} \frac{1}{\theta} d\theta} = e^{x-\theta} \quad x < \theta < +\infty$$

~~Να βρεθούν οι υστέρων κατανομές θ/x .~~

ii) Δ.Ε. ελαχίστου μήκους

Σχετικά με τη μονοτονία της θ/x ως προς θ θα έχουμε ότι:

$$\text{για } q_1 < q_2 \Rightarrow q_1 - x < q_2 - x \Rightarrow 1 - (q_1 - x) > 1 - (q_2 - x) \Rightarrow e^{-(q_1 - x)} > e^{-(q_2 - x)}$$

$$\Rightarrow f_{\theta|x}(q_1) > f_{\theta|x}(q_2) \quad \text{Επομένως } f_{\theta|x} \text{ φθίνουσα ως προς } \theta$$

Επομένως παραγωγίζω ως προς q_1 την ποσότητα $l = q_2 - q_1$

$$\text{και θα είναι } \frac{dl}{dq_1} = \frac{dq_2}{dq_1} - 1 = \frac{f_{\theta|x}(q_1) - f_{\theta|x}(q_2)}{f_{\theta|x}(q_2)} > 0 \Rightarrow l \text{ αύξουσα ως προς } q_1.$$

Επομένως ελαχιστοποιείται για $q_1 = x$ (ωστόν άκρο π.ο.)

$$\text{Επίσης θα είναι } P_{\theta|x}(x \leq \theta \leq q_2) = 1 - \alpha \Rightarrow \int_x^{q_2} f_{\theta|x} d\theta = 1 - \alpha \Rightarrow$$

$$\int_x^{q_2} e^{-\theta} e^x d\theta = 1 - \alpha \Rightarrow e^x [-e^{-\theta}]_x^{q_2} = 1 - \alpha \Rightarrow -e^{x-q_2} = -\alpha \Rightarrow x - q_2 = \ln \alpha \Rightarrow \boxed{q_2 = x - \ln \alpha}$$

Επομένως το δ.ε. ελαχιστού μήκους θα

$$\text{Εναι } (q_1, q_2) = (x, x - \ln a).$$